(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

<u>**ΘΕΜΑ Α΄**</u>

Α1. Απόδειξη σελ.135 σχολικού.

Α2. Διατύπωση θεωρήματος σελ.51 σχολικού.

Α3. Ορισμός Ισότητας Συναρτήσεων σελ.23 σχολικού

Α4.
Α)ΣΩΣΤΟ
Β)ΛΑΘΟΣ
Γ)ΣΩΣΤΟ
Δ)ΣΩΣΤΟ
Ε)ΣΩΣΤΟ

<u>***ΘΕΜΑ Β΄***</u>

Β1. *Στη δοθείσα σχέση θέτω* $w=x+1 \Leftrightarrow x=w-1$
Οπότε $f(w)=we^{-w+1} \Leftrightarrow f(w)= we^{-w+1}$
Άρα $f(x)= xe^{1-x}$, $x \in R$

Β2. *Η f είναι συνεχής στο R ως γινόμενο της πολυωνυμικής συνάρτησης* $y=x$ *και της σύνθεσης συνεχών* $y=e^{1-x}$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με:
$f'(x)=(x)'\, e^{1-x} +x(e^{1-x})' = e^{1-x} +x\, e^{1-x}\,(1-x)'= e^{1-x} -x\, e^{1-x}=(1-x)\, e^{1-x}$
επειδή $e^{1-x}>0$ *για κάθε* $x \in R$ *το πρόσημο της* $f'(x)$ *καθορίζεται από το* $1-x$ *οπότε:*
$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$
Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)\, e^{1-x} =0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$
Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $f'(x)$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Ο.Μ
f(1)=1

Άρα στο (-∞, 1] η f γνησίως αύξουσα και στο (1, +∞) η f είναι γνησίως φθίνουσα.
Στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την f(1)=1 .

Β3.
$f''(x)=[(1-x)\ e^{1-x}]' = (1-x)'\ e^{1-x} +(1-x)\ (e^{1-x})' =- e^{1-x} +(1-x)\ e^{1-x}\ (-1)=- e^{1-x}-(1-x)\ e^{1-x}=(x-2)\ e^{1-x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\ e^{1-x}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
το πρόσημο της f''(x) καθορίζεται από το πρόσημο του x-2. Έτσι :
$f''(x)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
$f''(x)<0 \Leftrightarrow x-2 <0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
f(x)			

Η f κοίλη στο (-∞,2] και κυρτή στο (2,+∞)
Στο $x_0=2$ αλλάζουν τα κοίλα, ορίζεται εφαπτομένη οπότε το σημείο (2, f(2))=(2, $\frac{2}{e}$) είναι σημείο καμπής.

<u>Ασύμπτωτες</u>
Κατακόρυφη ασύμπτωτη η C_f δεν έχει ως συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Πλάγια ή οριζόντια
Επειδή το όριο της εκθετικής συνάρτησης είναι διαφορετικό όταν x->+∞ από όταν x->-∞ έχουμε:
Στο +∞
$\lambda=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to}+\infty\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$ (θέτω u=1-x)

β= $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-0\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}$=$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0$
από κανόνα De L' Hospital.
Αρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.
Στο -∞
λ= $\lim_{\chi\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to} -\infty\frac{xe^{1-x}}{x}$= $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x}$= $\lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$ (θέτω u=1-x)
Αρα στο -∞ δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

Β4. f($(-\infty,1]$)=($\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] = (-\infty,1]$ γιατί $\lim_{\chi\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = -\infty$
f($(1,+\infty)$)=($\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)) = (0,1)$ γιατί $\lim_{\chi\to+\infty} f(x) = 0$
$\lim_{\chi\to1^+} f(x) = f(1) = 1$
Αρα η ένωση των προηγούμενων 2 διαστημάτων δίνει το σύνολο τιμών (-∞, 1].
ιι) Δια κρίνουμε τις περιπτώσεις:
Αν λ>1 η f(x)=λ είναι αδύνατη.
Αν λ=1 η f(x)=1 έχει μοναδική ρίζα την x=1
Αν 0<λ<1 η f(x)=λ έχει 2 ακριβώς ρίζες μια στο (-∞,1) και μια στο (1,+∞) ως γνησία μονότονη σε καθένα από αυτά.
Αν λ≤ 0 τότε έχει μοναδική ρίζα.

Γ1.

Στο $(-\infty,0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο (0, $\frac{3\pi}{2}$] η f είναι συνεχής, ως τριγωνομετρική.

Στο x_0=0 έχω

$$\lim_{\chi\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}(ax^3-3x^2-x+1) = 1$$

$\lim_{\chi\to0^+} f(x) = \lim_{x\to+} \sigma\upsilon\nu$x=1

f(0)=α· 0^3-3·0^2-0+1=1

Αρα $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής και στο x_0=0 άρα συνεχής στο πεδίο ορισμού της ($-\infty,\frac{3\pi}{2}$].

Για την παραγωγισιμότητα στο x_0=0

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}$= $\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x}{x}$= $\lim_{x\to0^-}\frac{x(ax^2-3x-1)}{x}$=-1

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$=0

Άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο x_0=0

Γ2. Η f συνεχής στο $[0,\frac{3\pi}{2}]$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{3\pi}{2})$ με f'(x)=(συνx)'=-ημx

f(0)=1, $f(\frac{3\pi}{2})$=συν$\frac{3\pi}{2}=0$

Άρα δεν ισχύει μία από τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,\frac{3\pi}{2}]$.

ιι) Στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχω f'(x)=0⇔-ημx=0⇔ημx=0⇔x=π

Άρα το ξ=π είναι μοναδική ρίζα της f΄(x)=0

Γ3. Για x∈(-∞,0) η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x)=(\alpha x^3-3x^2-x+1)'=3\alpha x^2-6x-1$

Θα δείξω ότι η εξίσωση f'(x)=0 είναι αδύνατη.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot\alpha(-1)=36+12^{\alpha}=12(3+\alpha)<0$ αφού α<-3.

Άρα δεν υπάρχει σημείο $(x_0,f(x_0))$ με $x_0<0$ όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ.

Γ4. Για x<0 η $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1<0$ γιατί είναι τριώνυμο ομόσημο του α με α<0.

Στο $(0,\frac{3\pi}{2}]$ έχουμε ότι f'(x)=0⇔ $-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\pi$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου

X	-∞	0	π	$3\,\frac{\pi}{2}$
f' (x)	-	-	0	+
f(x)	↘	↘		↗

Η f συνεχής άρα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (-∞,0] ,[0,π] και γνησίως αύξουσα στο $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$.

Στο x_0=π παρουσιάζει ελάχιστο με ελάχιστη τιμή f(π)=συνπ=-1.

Αρα f(x)≥f(π)⇔f(x)≥-1 για κάθε x ∈ $(-\infty,\frac{3\pi}{2}]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = lnx - \frac{1}{x}, x\varepsilon(0, \infty)$.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $[1, e]$.

- $f(1) = ln1 - 1 = -1 < 0$
- $f(e) = lne - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$,

άρα $f(1) * f(e) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano,

η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\chi_o \varepsilon(1, e)$

Η f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με $f'(x) = \left(lnx - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα f ως συνεχής είναι γν. αύξουσα στο (0,+∞).

Οπότε η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο (0,+∞) και επειδή έχει την χ_o που εξασφαλίσαμε, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Δ2.

Η $f(x) = (lnx_o) * (x + 1) - lnx - 1, x\varepsilon(0, +\infty)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με

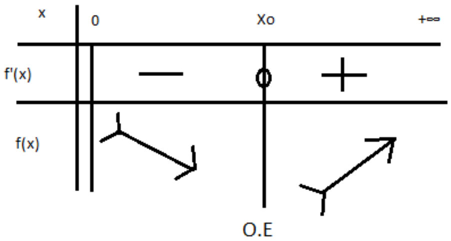
$$f'(x) = lnx_o * 1 - \frac{1}{x} = lnx_o - \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = 0 <=> lnx_o = \frac{1}{x} <=> x * lnx_o = 1 <=> x = \frac{1}{lnx_o} = \frac{1}{\frac{1}{x_o}} = x_o$$

Για το πρόσημο της f'(x) έχουμε

$$f'(x) > 0 <=> lnx_o - \frac{1}{x} > 0 <=> lnx_o > \frac{1}{x} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} lnx_o * x > 1 \xLeftrightarrow{lnx_o = \frac{1}{x_o}} \frac{1}{x_o} * x > 1 \overset{x_o>0}{\Longleftrightarrow} x > x_o$$

Ανάλογα $f'(x) < 0 \iff x < x_o$



Στο $(0, +\infty)$ *η f γνήσια φθίνουσα και στο* $[\chi_o, +\infty]$ *η f γνήσια αύξουσα. Άρα στο* χ_o *παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το*

$$f(x_o) = (lnx_o) * (x_o + 1) - lnx_o - 1 =$$
$$= x_o * lnx_o + lnx_o - lnx_o - 1 =$$
$$= x_o * \frac{1}{x_o} - 1 = 0$$

Δ3.

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{(x_0)^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e^{x+1}x = e^x (x_0)^{x+1} \Leftrightarrow ex = (x_0)^{x+1}$
(2)

Αν $x \le 0$ η (2) είναι αδύνατη οπότε η **(2)** ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

Επομένως :

$\ln(ex) = \ln(x_0)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = (x+1)\ln x_0 \Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

Άρα $\boxed{g(x_0) = h(x_0)}$

Η $g(x) = xe^{-x}$ παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

Η $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$

$g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = \frac{1 - x_0}{e^{x_0}}$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=x_0e^{-x_0}(\ln x_0-1)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Άρα $\boxed{g'(x_0)=h'(x_0)}$

Επειδή $g(x_0)=h(x_0)$ και $g'(x_0)=h'(x_0)$ οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0

Δ4. Η απόσταση των σημείων $A(x,f(x)), B(x,\varphi(x))$ για $x>0$ είναι

$$AB=\sqrt{(x-x)^2+\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2}=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x)$$

Αλλιώς επειδή τα Α, Β έχουν την ίδια τετμημένη η απόσταση ΑΒ είναι η κατακόρυφη απόστασή τους οπότε $(AB)=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x)$

Έστω η συνάρτηση $t(x)=f(x)-\varphi(x), x>0$.

Η t είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την παραγωγισιμότητα της φ στο x_0.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στοx_0 επειδή και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 σύμφωνα με το θεώρημα παράγωγος αθροίσματος η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $t'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)=-\varphi'(x_0)$.

Το x_0 εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ οπότε η t παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, οπότε από Θεώρημα Fermat $t(x_0)=0 \Leftrightarrow -\varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=0$ άρα το x_0 κρίσιμο σημείο της.

Έτσι το x_0 σε κάθε περίπτωση είναι κρίσιμο σημείο της φ.